第9讲 分式方程的解的讨论

**知识梳理**

我们知道，在解分式方程的过程中，有可能产生\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.正因为如此，分式方程的根的情况与一元二次方程的根的情况有所不同.

**1．分式方程有增根，求字母系数的值**

解题的关键在于理解增根的意义.无论是分式方程的根，还是分式方程的增根，均是去分母后所得到的整式方程的根.而这个整式方程的根如果是分式方程的增根，则代入原方程的分母后，至少有一个为零.

解答此类问题的基本思路是：①将所给方程化为整式方程；②由所给方程确定增根；

③将增根代入变形后的整式方程，求出字母系数的值.

**2．分式方程无解，求字母系数的值**

解答此类问题的基本思路是：①化为整式方程.

②把整式方程分为两种情况讨论，整式方程无解和整式方程的解为增根.

**3．分式方程只有一个实数根，求字母系数的值**

原分式方程只有一个实数根，说明原分式方程去分母后化为的一元二次方程的实数根有两种情况.

(1)这个一元二次方程有两个不相等的实数根，且其中有一个是原分式方程的增根；

(2)这个一元二次方程有两个相等的实数根，且都不是原分式方程的增根.

**典型解析**

**例1：**已知关于*x*的分式方程的根是2，则*m*的值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：5

**例2：**方程可能产生的增根是( )

A．1 B．2 C．1或2 D．-1或2

**【变式训练】**

(1)当*m*=\_\_\_\_\_\_时，方程有增根.

(2)若分式方程(其中*k*为常数)产生增根，则增根是 ( )

A．*x*=6 B．*x*=5 C．*x*=*k* D．无法确定

(3)解关于*x*的方程产生增根，则常数*m*的值等于 ( )

A．-2 B．-1 C．1 D．2

**例3：**已知关于*x*的方程有增根，求*a*.

**分析**.若原方程有增根，那么这个增根一定是*x*=1或*x*=2.同时我们知道增根是原方程去分母后化为的整式方程的根，而不是原分式方程的根，因此我们应该将增根代入原方程去分母后化为的整式方程，求出*a*的值.

**解**.原方程去分母，得

(*x*-2)+*a*(*x*-1)=2*a*+2.①

因为关于*x*的方程有增根，

所以，这个增根一定是*x*=1或*x*=2.

(1)若原方程有增根为*x*=1，则将*x*=1代入方程①，得(1-2)+*a*(1-1)=2*a*+2.解得

(2)若原方程有增根为*x*=2，则将*x*=2代入方程①，得(2-2)+*a*(2-1)=2*a*+2.解得*a*=-2.

所以，当或*a*=-2时，关于*x*的方程有增根.

**【变式训练】**

已知关于*x*的方程有一个增根，且*a*、*b*互为相反数，求*a*、*b*的值.

答案：*a*=-1，*b*=1.提示：原方程化为整式方程为

2*x*2+5*x*+*a*+3*b*-(*x*+2)2=(8*a*2-31*b*)(*x*+2).①

由于原方程有一增根，因此增根必为*x*=-2.把增根*x*=-2代入方程①，得

8-10+*a*+3*b*=0，

即*a*+3*b*=2.

又*a*、*b*互为相反数，则*a*+*b*=0.

解得*a*=-1，*b*=1

**例4：**当*a*取何值时，方程的解是负数？

答案：*a*<-5且*a*≠-7.提示：去分母后解得则且

**【变式训练】**

若方程的解是正数，求*a*的取值范围.

答案：*a*<2且*a*≠-4

**例5：**当*m*是什么数值时，分式方程有实数根？

**答案：***m*≠-3且*m*≠5

**【变式训练】**

若关于*x*的方程无实数根，求*m*的取值.

**分析**.原分式方程无实数根，说明原分式方程去分母后化为的一元二次方程的实数根有两种情况.(1)这个一元二次方程无实数根；(2)这个一元二次方程有实数根，但这些实数根都是原分式方程的增根.

**解**.原方程去分母后，整理得

*x*2-*x*+2-*m*=0.①

若原方程无实数根，则方程①无实数根；或者方程①有实数根，但方程①的实数根都是原方程的增根.

(1)方程①无实数根，则方程①的判别式的值小于零，即

△=1-4(2-*m*)<0.

解得

(2)方程①的实数根都是原方程的增根.

若原方程产生增根*x*=0，代入方程①，得02-0+2-*m*=0.

解得*m*=2.

若原方程产生增根*x*=1，代入方程①，得*l*2-1+2-*m*=0.

解得*m*=2.

所以，当*m*=2时，方程①的根*x*1=0，*x*2=1都是增根，此时原方程无解.

综上所述，当或*m*=2时，关于*x*的方程无实数根.

**例6：**当*a*取什么整数时，关于*x*的方程只有一个实数根，并求此实数根.

**分析**.原分式方程只有一个实数根，说明原分式方程去分母后化为的一元二次方程的实数根有两种情况.(1)这个一元二次方程有两个不相等的实数根，且其中有一个是原分式方程的增根；(2)这个一元二次方程有两个相等的实数根，且都不是原分式方程的增根.

**解：**原方程去分母后，整理得

2*x*2-2*x*+4+*a*=0.①

因为原方程恰有一个实根，所以，方程①有两个不相等的实数根，且其中有一个是原分式方程的增根；或者方程①有两个相等的实数根，且都不是原分式方程的增根.

(1)方程①有两个不相等的实数根，且其中有一个是原分式方程的增根.

若原方程产生增根*x*=0，代入方程①，得

2×02-2×0+4+*a*=0.

【与一元二次方不同，分式方程是没有重根的.】

解得*a*=-4.

把*a*=-4代入方程①，整理得*x*2-*x*=0.

解得*x*1=0，*x*2=1.

经检验，*x*=0是增根，*x*=1是原方程的根，

所以当*a*=-4时，方程只有一个实数根，

若原方程产生增根*x*=2，代入方程①，得2×22-2×2+4+*a*=0.

解得*a*=-8.

把*a*=-8代入方程①，整理得*x*2-*x*-2=0.

解得*x*1=2，*x*2=-1.

经检验，*x*=2是增根，*x*=-1是原方程的根.

所以当*a*=-8时，方程只有一个实数根.

(2)方程①有两个相等的实数根，且都不是原分式方程的增根，则方程①的△=0.

即△=4-4×2×(4+*a*)=-28-8*a*=0.

解得

因为*a*为整数，所以不合题意，舍去.

综上所述，当*a*=-4时，原方程只有一个实数根，且这个实数根是*x*=1；

当*a*=-8时，原方程只有一个实数根，且这个实数根是*x*=-1.

由此，我们可以看出，对于分式方程的解的讨论，不仅要考虑分式方程去分母后的整式方程的根的情况，也要考虑原分式方程是否有增根的情况.

**【变式训练】**

若关于*x*的方程只有一个实数根，求*k*的取值范围.

答案：*k*=3、0、4.提示：原方程去分母后，整理得

*x*2+(*k*-1)*x*+*k*-2=0.①

(1)由△=0得(*k*-3)2=0，解得*k*=3，此时方程①有根*x*=-1，且不是增根；

(2)当产生增根*x*=2时，代入方程①得*k*=0，此时另一个根为*x*=-1不是增根；当产生增

根*x*=-2时，代入方程①得*k*=4，此时另一个根为*x*=-1不是增根.因此，*k*=3、0、4

**同步训练**

**一、填空题**

1．方程的增根是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

2．方程有增根，则*k*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

3．若用“两边同时乘以最简公分母法”解关于*x*的方程时，有增根*x*=-1，则*m*的值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：1

4．若分式方程无解，那么的值应为

答案：*m*=-8

5．某项工程限期完成，甲单独做提前1天完成，乙单独做延期2天完工，现两人合作1天后，余下的工程由乙队单独做，恰好按期完工，求该工程限期 天.

答案：*x*=4

6．阅读材料：

方程的解为，

方程的解为*x*=2，

方程的解为，…请写出能反映上述方程一般规律的方程，并直接写出这个方程的解是 ．

答案： *x*=*n*

**二、选择题**

7．关于*x*的方程的根为*x*=2，则*a*应取值 .

A．1 B．3 C．－2 D．－3

答案：C

8．李老师在黑板上出示了如下题目：“已知方程，试添加一个条件，使方程的解是*x*=-1”后，小颖的回答是：“添加*k*=0的条件”；小亮的回答是：“添加*k*=2的条件”，则你认为 .

A．只有小颖的回答正确 B．小亮、小颖的回答都正确

C．只有小亮的回答正确 D．小亮、小颖的回答都不正确

答案：A

**三、解答题**

9．设关于*x*的方程的根为正数，求*a*的值.

**答案：***a*<-1且*a*≠-3.提示**:**原方程去分母后整理得，-2*x*=*a*+1，解得

因为要使原方程有解，所以*x*≠-2且*x*≠1，因此且

解得*a*≠3且*a*≠-3.

因为原方程的根为正数，所以，因此*a*<-1.

所以，当*a*<-1且*a*≠-3时，原方程的根为正数

10．已知关于*x*的方程有增根，求*k*的值.

解：两边同乘以*x*(*x*+1)(*x*-1)，得(*x*+1)+(*k*-5)(*x*-1)=*x*(*k*-1)

因为原方程的增根可能是0、1，-1，

所以当*x*=0时，*k*=6；

当*x*=1时，*k*=3；

当*x*=-1时，*k*=9.

所以当*k*=3或6或9时，方程有增根.

11．已知：关于*x*的方程只有一个实数根，求*a*.

答案：*a*=4.提示**:**原方程可化为

所以或

因为原方程只有一个根，所以或

解得*a*=4或无解.当产生增根*x*=0时，此时*a*=0，此时△1>0，△2>0不合题意.

当*a*=4时，方程的根只有*x*=2.

所以，当*a*=4时，关于*x*的方程

只有一个实数根